

10. évfolyam – Javítási útmutató

1. a) Melyik a nagyobb?

$$A = \frac{10^{2017}+1}{10^{2018}+1}; \text{ vagy } B = \frac{10^{2018}+1}{10^{2019}+1}$$

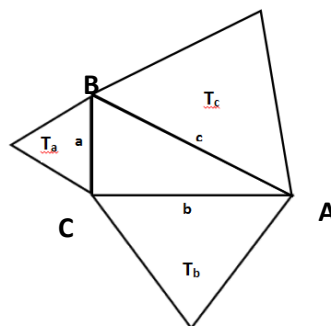
Megoldás:

- Vizsgáljuk az $A - B$ különbséget: **1 pont**
 - $$A - B = \frac{(10^{2017}+1)(10^{2019}+1) - (10^{2018}+1)(10^{2018}+1)}{(10^{2018}+1)(10^{2019}+1)}$$
1 pont
 - A számláló előjelének vizsgálata:
 - $10^{4036} + 10^{2017} + 10^{2019} + 1 - 10^{4036} - 2 \cdot 10^{2018} - 1 =$ **1 pont**
 - $= 10^{2017}(1 + 10^2 - 2 \cdot 10)$ **1 pont**
 - $A - B > 0 \Rightarrow A > B$ **1 pont**
- 5 pont**

b) Az ABC háromszög oldalaira kifelé szerkesszünk szabályos háromszöget! Bizonyítsa be, hogy ha a háromszög két oldalára írt szabályos háromszög területének összege megegyezik a harmadik oldalra írt szabályos háromszög területével, akkor az ABC háromszög derékszögű!

Megoldás:

- Legyenek a, b, c a háromszög oldalai.



- Az a oldalú szabályos háromszög területe: $T_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ **1 pont**
 - A b ill. c oldalú szabályos háromszög területe: $T_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ ill. $T_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ **1 pont**
 - $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ **2 pont**
 - $a^2 + b^2 = c^2$ **1 pont**
- 5 pont**

2. a) A $p(x) = x^2 + 2(k - 9)x + k^2 + 3k + 4$ polinom k milyen értékére lesz teljes négyzet?

Megoldás:

- A $p(x)$ akkor teljes négyzet, ha a $p(x) = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0. **2 pont**
 - $[2(k - 9)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 + 3k + 4) = 0$ **1 pont**
 - $4k^2 - 72k + 324 - 4k^2 - 12k - 16 = 0$
 - $-84k + 308 = 0$ **1 pont**
 - $308 = 84k$
 - $\frac{11}{3} = k$ **1 pont**
- 5 pont**

b) Két pozitív szám számtani közepe a . Négyzetük számtani közepe b . Számítsuk ki a két szám mértani közepét!

Megoldás:

- $\frac{x+y}{2} = a; \frac{x^2+y^2}{2} = b$
 - $x + y = 2a; x^2 + y^2 = 2b$ **1 pont**
 - $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2a)^2 - 2xy$ **1 pont**
 - $4a^2 - 2xy = 2b$ **1 pont**
 - $2xy = 4a^2 - 2b$
 - $xy = 2a^2 - b$ **1 pont**
 - $\sqrt{xy} = \sqrt{2a^2 - b}$ **1 pont**
- 5 pont**

3. Mutassa meg, hogy minden n természetes számra $n^3 - n$ vagy $n^3 + n$ osztható 10-zel!

Megoldás:

- Egy szám 10-zel való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy legalább egy 0-ra végződjön. **1 pont**
- Megvizsgálva a számok végződéseit: **1 pont**

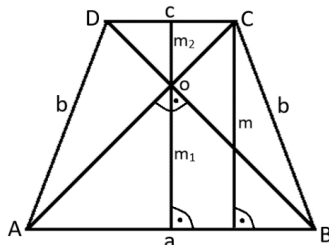
n végződése	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3 végződése	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$n^3 - n$ végződése	0	0	6	4	0	0	0	6	4	0
$n^3 + n$ végződése	0	2	0	0	8	0	2	0	0	8

- Ha n 0; 1; 4; 5; 6; 9 valamelyikére végződik, akkor $n^3 - n$ osztható 10-zel. **1 pont**
 - Ha n 0; 2; 3; 5; 7; 8 valamelyikére végződik, akkor $n^3 + n$ osztható 10-zel. **1 pont**
- 10 pont**

4. Egy egyenlőszárú trapéz átlói merőlegesen egymásra. A trapéz magassága 10. Mekkora a trapéz területe?

Megoldás:

- Jó ábra.



1 pont

- Jó ábra. **2 pont**
- Az ABO háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög. **1 pont**
- $m_1 = \frac{a}{2}$ **1 pont**
- A COD háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög. **1 pont**
- $m_2 = \frac{c}{2}$ **1 pont**
- $m = m_1 + m_2 = \frac{a+c}{2} = 10$ **2 pont**
- $T = \frac{a+c}{2} \cdot m = m \cdot m = m^2 = 100$ **2 pont**

10 pont

5. Egy sakkversenyen hatan vettek részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. A győzelemért 1 pont, a döntetlenért 0,5-0,5 pont, a vereségért 0 pont járt. A verseny végén mindenkinek egész számú pontja lett és bármely két versenyző pontszáma különböző volt. Mutassa meg, hogy a versenyen nem volt döntetlen mérkőzés!

Megoldás:

- $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ mérkőzést játszottak összesen. **2 pont**
- Minden mérkőzésen 1 pont került kiosztásra (0+1, vagy 0,5+0,5), így összesen 15 pont került kiosztásra. **1 pont**
- Bármely két versenyző pontszáma különböző, a szerzett pontok összege egész, így 5; 4; 3; 2; 1; 0 pontot értek el a versenyzők ($5+4+3+2+1+0 = 15$) **1 pont**
- Az 5 és a 0 pontot szerzett versenyző nem játszhattak döntetlent. **1 pont**
- Az 1 pontot szerzett sem játszhatott döntetlent. **1 pont**
- Ha a 4; 3; 2 pontot szerzett versenyzők döntetlent játszottak, akkor 2-2 döntetlen mérkőzésre került volna sor, hogy egész legyen a pontszámuk. Ekkor azonban mindhárman 3-3 ponttal fejezték volna be a versenyt. **2 pont**
- Tehát nem volt döntetlen mérkőzés. **2 pont**

10 pont